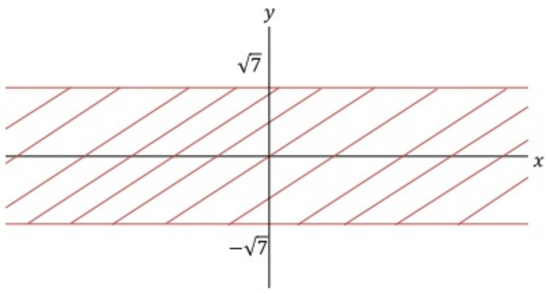
# 1. část

1. $(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4)$ je kladná báze orientovaného vektorového prostoru $V_4$.
Rozhodněte, zda vektory $(\underline{\mathbf{u}}_3, -2\underline{\mathbf{u}}_1 + \underline{\mathbf{u}}_4, -\underline{\mathbf{u}}_4 - \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_2)$ tvoří kladnou, resp. zápornou bázi $V_4$.

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+4} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 < 0 \;\Rightarrow\; \text{záporná báze}$$

2. V afinní rovině je dána množina $M$, množinu načrtněte a rozhodněte, zda je konvexní:

$$M = \{[x, y] | y^2 \leq 7\}$$




Ano, je konvexní.

3. V kanonickém afinním prostoru $A_4$ udejte příklad netriviálního afinního podprostoru $\beta$ a nenulového vektoru $\underline{\mathbf{w}}$ tak, aby ortogonální projekce vektoru $\underline{\mathbf{w}}$ vzhledem k $\beta$ byla nulový vektor.

Ortogonální projekce nulový vektor $\Rightarrow \underline{\mathbf{w}} \in Z(\beta)^{\perp}$

$$\beta: \; x_1 = 0$$

$$\underline{\mathbf{w}} = (1, 0, 0, 0)$$

4. V afinní rovině jsou dány body $A[0; k]$ a $B[3; 0]$. Určete souřadnice bodu $C$ tak, aby platilo $(B; A, C) = -3$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= -3 \cdot \overrightarrow{CB} \\ B - A &= -3 \cdot (B - C) \\ C &= \frac{1}{3}(4B - A) \\ C &= \left[4; -\frac{k}{3}\right] \end{aligned}$$

5. Uveďte příklad dvou rovnoběžných podprostorů, jejichž součtem je celý afinní prostor.

Například dvě rovnoběžné různé přímky v rovině.

$$A_2: \; p \equiv X = [0; 0] + t(1; 0) \quad q \equiv X = [0; 1] + s(1; 0)$$

6. Napište definici vzdálenosti afinních podprostorů.

Definice 15.1.
Nechť $B, C$ jsou podprostory euklidovského (bodového) prostoru $E$.
Pak vzdáleností podprostorů $B, C$ nazýváme nezáporné reálné číslo $v(B, C)$, definované

$$v(B, C) = \min\{\overline{XY} | X \in B, Y \in C\}.$$

7. Uveďte příklad tří bodů, které nejsou v obecné poloze.

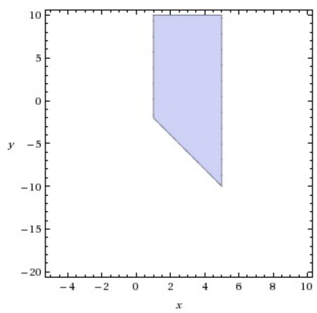
$$\begin{aligned} A_1 &= [1;0] \\ A_2 &= [0;1] \\ A_3 &= [1;1] \end{aligned}$$

8. $(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4)$ je kladná báze orientovaného vektorového prostoru $V_4$.
Rozhodněte, zda vektory $(\underline{\mathbf{u}}_4, \underline{\mathbf{u}}_2, 3\underline{\mathbf{u}}_3 - 2\underline{\mathbf{u}}_1, -\underline{\mathbf{u}}_1)$ tvoří kladnou, resp. zápornou bázi $V_4$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 > 0 \Rightarrow \text{ kladná báze}$$

9. V afinní rovině je dána množina $M$, množinu načrtněte a rozhodněte, zda je konvexní:

$$M = \{[x, y] | y + 2x \geq 0, x \in (1; 5)\}$$




Ano, je konvexní.

10. V kanonickém afinním prostoru $A_4$ udejte příklad netriviálního afinního podprostoru $\beta$ a nenulového vektoru $\underline{\mathbf{w}}$ tak, aby ortogonální komponenta vektoru $\underline{\mathbf{w}}$ vzhledem k $\beta$ byla nulový vektor.

Ortogonální komponenta nulový vektor $\Rightarrow \underline{\mathbf{w}} \in Z(\beta)$

$$\beta \equiv X = [0;0;0;0] + t(1;0;0;0)$$

$$\underline{\mathbf{w}} = (1, 0, 0, 0)$$

11.
V afinní rovině jsou dány body $A[0;2]$ a $B[-3;p]$. Určete souřadnice bodu $C$ tak, aby platilo $(A;C,B)=2$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} &= 2\cdot\overrightarrow{BA} \\ A-C &= 2\cdot(A-B) \\ C &= -A+2B \\ C &= [-6;2p-2] \end{aligned}$$

12. Uveďte příklad nadroviny a přímky tak, aby jejich odchylka byla $45°$.

V afinní rovině jde o dvě přímky.

$$A_2:\ p\equiv X=[0;0]+t(1;0)\quad q\equiv X=[0;0]+s(1;1)$$

13. Napište definici kolmosti vektorových podprostorů.

Definice 11.5.
Nechť $W,S$ jsou netriviální podprostory euklidovského vektorového prostoru $V$. Je-li

$$W\subseteq S^{\perp}\text{ nebo }W\supseteq S^{\perp},$$

pak podprostory $W,S$ nazýváme kolmé (ve $V$) a označujeme $W\perp S$.

14. Uveďte příklad dvou totálně kolmých podprostorů, jejichž průnikem je přímka.

Dle věty 13.2. část 2. je průnikem totálně kolmých podprostorů bod, tedy takovéto podprostory neexistují.

15. Uveďte příklad bodů v obecné poloze tak, aby generovaly podprostor dimenze 3.

Podprostor dimenze 3 $\Rightarrow$ 4 body v obecné poloze, alespoň v $A_3$

$$\begin{aligned} A_0 &= [0;0;0] \\ A_1 &= [1;0;0] \\ A_2 &= [0;1;0] \\ A_3 &= [0;0;1] \end{aligned}$$

16. Napište parametrické vyjádření podprostoru $\beta$ v $A_4$, je-li $\beta\equiv x_2=1$.

$$\beta\equiv X=[0;1;0;0]+t(1;0;0;0)+s(0;0;1;0)+r(0;0;0;1)$$

17. Uveďte příklad tří nadrovin patřících do jednoho svazku prvního druhu.

V afinní rovině jde o tři přímky procházející jedním bodem.

$$A_2:\ p_1\equiv X=[0;0]+t(1;0)\quad p_2\equiv X=[0;0]+s(0;1)\quad p_3\equiv X=[0;0]+r(1;1)$$

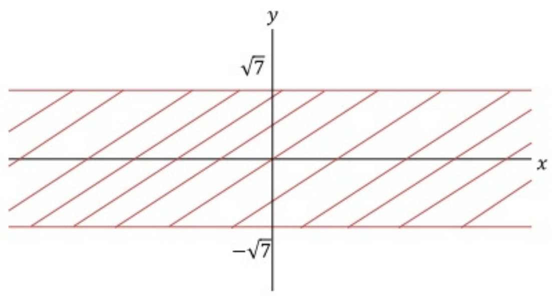
18. Nakreslete přímku a na ní body $A, B, C$ tak aby $(B; C, A) = 3$


19. Rozhodněte, zda jsou body $A = [3, -2, -3, 1]$, $B = [9, -2, 3, -8]$ oddělovány nadrovinou $\beta \equiv 3x_1 - 7x_2 + 11x_3 + 13x_4 = 17$.

$$\begin{aligned} \beta: \ 3x_1 - 7x_2 + 11x_3 + 13x_4 - 17 &= 0 \\ A: \ 3 \cdot (3) - 7 \cdot (-2) + 11 \cdot (-3) + 13 \cdot (1) - 17 &= -14 \\ B: \ 3 \cdot (9) - 7 \cdot (-2) + 11 \cdot (3) + 13 \cdot (-8) - 17 &= -47 \end{aligned}$$

Body $A, B$ nejsou oddělovány nadrovinou $\beta$.

20. V afinní rovině je dána množina $M = \{[x, y] | y^2 \leq 7\}$, rozhodněte, zda je konvexní.




Ano, je konvexní.

21. Určete ortonormální bázi podprostoru generovaného vektory $(1, 2, 2)$ a $(1, 1, 1)$.

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{f}}_1 &= (1, 1, 1) \\ \underline{\mathbf{f}}_2 &= a \cdot (1, 1, 1) + (1, 2, 2) / \cdot (1, 1, 1) \\ 0 &= 3a + 5 \\ a &= -\frac{5}{3} \\ \underline{\mathbf{f}}_2 &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Znormujeme:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\underline{\mathbf{f}}_1}{||\underline{\mathbf{f}}_1||} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ \underline{\mathbf{e}}_2 &= \frac{\underline{\mathbf{f}}_2}{||\underline{\mathbf{f}}_2||} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right) \end{aligned}$$

22. Uveďte příklad dvou rovnoběžných podprostorů, jejichž součtem je celý afinní prostor.

Například dvě rovnoběžné různé přímky v rovině.

$$A_2 : \; p \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad q \equiv X = [0;1] + s(1;0)$$

23. Napište definici kolmosti dvou vektorových podprostorů.

Definice 11.5.
Nechť $W, S$ jsou netriviální podprostory euklidovského vektorového prostoru $V$. Je-li

$$W \subseteq S^{\perp} \text{ nebo } W \supseteq S^{\perp},$$

pak podprostory $W, S$ nazýváme kolmé (ve $V$) a označujeme $W \perp S$.

24. Udejte příklad dvou totálně kolmých nadrovin v $A_2$.

Jde o dvě kolmé přímky v afinní rovině.

$$p_1 \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad p_2 \equiv X = [0;0] + s(0;1)$$

25. $(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4)$ je kladná báze orientovaného vektorového prostoru $V_4$.
Rozhodněte, zda vektory $(\underline{\mathbf{u}}_2, -\underline{\mathbf{u}}_1 - 4\underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_4 - \underline{\mathbf{u}}_3, 2\underline{\mathbf{u}}_3)$ tvoří kladnou, resp. zápornou bázi $V_4$.

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0 \;\Rightarrow\; \text{záporná báze}$$

26. Napište definici konvexní množiny.

Definice 10.1.
Podmnožina $K$ afinního prostoru $A$ se nazývá konvexní množina (v $A$), jestliže pro libovolné $A, B \in K$ platí, že $[A, B] \subseteq K$.

27. V afinní rovině udejte příklad dvou poloprostorů tak, aby jejich průnikem byla prázdná množina.

$$\beta_1 : \; x \geq 1 \quad \beta_2 : \; x \leq 0$$

28. Napište definici kolmosti dvou vektorových podprostorů.

Definice 11.5.
Nechť $W, S$ jsou netriviální podprostory euklidovského vektorového prostoru $V$. Je-li

$$W \subseteq S^{\perp} \text{ nebo } W \supseteq S^{\perp},$$

pak podprostory $W, S$ nazýváme kolmé (ve $V$) a označujeme $W \perp S$.

29. Uveďte příklad tří nadrovin patřících do jednoho svazku prvního druhu.

V afinní rovině jde o tři přímky procházející jedním bodem.

$$A_2: \ p_1 \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad p_2 \equiv X = [0;0] + s(0;1) \quad p_3 \equiv X = [0;0] + r(1;1)$$

30. Uveďte příklad afinního podprostoru $A$ a vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ tak, aby velikost ortogonální komponenty vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ vzhledem k podprostoru $A$ byla $\sqrt{3}$.

V afinní rovině si to můžeme představit na sousedních stranách rovnostranného trojúhelníku o délce strany 2, takže jeho výška je $\sqrt{3}$.

$$\beta \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad \underline{\mathbf{u}} = (1; \sqrt{3})$$

31. V $A_4$ uveďte příklad dvojice mimoběžných přímek.

$$p_1 \equiv X = [1;0;0;0] + t(0;1;0;0) \quad p_2 \equiv X = [0;0;1;0] + s(0;0;0;1)$$

32. Uveďte příklad bodů v obecné poloze, tak aby generovaly podprostor dimenze 3.

Podprostor dimenze 3 $\Rightarrow$ 4 body v obecné poloze, alespoň v $A_3$

$$\begin{aligned} A_0 &= [0;0;0] \\ A_1 &= [1;0;0] \\ A_2 &= [0;1;0] \\ A_3 &= [0;0;1] \end{aligned}$$

33. Je dáno vyjádření roviny $\varrho \equiv X = [0;1;0] + t(1;1;1) + s(2;1;0)$ v afinním repéru $R$. Vyjádřete rovinu $\varrho$ v afinním repéru $R'$ pokud znáte transformační rovnice:

$$\begin{aligned} x &= -x' + y' - 2 \\ y &= y' + z' + 3 \\ z &= x' - y' + z' \end{aligned}$$

Naparametricky:

$$\varrho: \ x - 2y + z + 2 = 0$$

Dosadíme:

$$\varrho: \ -2y' - z' - 6 = 0$$

34. $(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4)$ je záporná báze orientovaného vektorového prostoru $V_4$.
Rozhodněte, zda vektory $(-\underline{\mathbf{u}}_1 + \underline{\mathbf{u}}_2, -2\underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_2 + 2\underline{\mathbf{u}}_4, \underline{\mathbf{u}}_1 - \underline{\mathbf{u}}_3)$ tvoří kladnou, resp. zápornou bázi $V_4$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 4 > 0 \ \Rightarrow \ \text{záporná báze}$$

35. Uveďte příklad konvexní množiny v rovině, tak aby nebyla afinním podprostorem.

Například úsečka

$$\beta \equiv X = [0;0] + t(1;0), \quad t \in \langle 0;1 \rangle$$

36. V rovině udejte příklad dvou poloprostorů tak, aby jejich průnikem byl rovinný pás.

$$\beta_1 : \ x \leq 1 \quad \beta_2 : \ x \geq 0$$

37. Napište definici totální kolmosti dvou vektorových podprostorů.

Definice 11.5.
Nechť $W, S$ jsou netriviální podprostory euklidovského vektorového prostoru $V$.
Je-li $W = S^{\perp}$, pak podprostory $W, S$ nazýváme totálně kolmé (ve $V$).

38. Uveďte příklad tří nadrovin patřících do jednoho svazku druhého druhu.

V afiiní rovině jde o tři rovnoběžné přímky.

$$A_2 : \ p_1 \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad p_2 \equiv X = [0;1] + s(1;0) \quad p_3 \equiv X = [0;2] + r(1;0)$$

39. Uveďte příklad afinního podprostoru $A$ a vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ tak, aby velikost ortogonální projekce vektoru $\underline{\mathbf{u}}$ vzhledem k podprostoru $A$ byla $\sqrt{5}$.

V afinní rovině uvažme pravoúhlý trojúhelník, jehož jedna odvěsna má délku $\sqrt{5}$ a představuje část podprostoru $\beta$. Hledaný vektor je pak přeponou tohoto trojúhelníku.

$$\beta \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad \underline{\mathbf{u}} = (\sqrt{5};1)$$

40. V $A_4$ uveďte příklad přímky a roviny, tak aby byly rovnoběžné.

$$p \equiv X = [1;0;0;0] + t(1;0;0;0) \quad \varrho \equiv X = [0;0;0;0] + s(1;0;0;0) + r(0;0;0;1)$$

41. Uveďte příklad šesti bodů v obecné poloze.

6 bodů v obecné poloze $\Rightarrow$ alespoň v $A_5$

$$\begin{aligned} A_1 &= [0;0;0;0;0] \\ A_2 &= [1;0;0;0;0] \\ A_3 &= [0;1;0;0;0] \\ A_4 &= [0;0;1;0;0] \\ A_5 &= [0;0;0;1;0] \\ A_6 &= [0;0;0;0;1] \end{aligned}$$

42. Je dáno vyjádření přímky $p \equiv X = [3;1;0] + t(1;1;4)$ v afinním repéru $R$. Vyjádřete přímku $p$ v afinním repéru $R'$, pokud znáte transformační rovnice:

$$\begin{aligned} x &= x' + y' - 2z' - 2 \\ y &= -x' + y' + z' \\ z &= y' + 2z' - 1 \end{aligned}$$

Neparametricky:

$$p: \ -4x + z + 12 = 0 \quad -x + y + 2 = 0$$

Dosadíme:

$$p: \ -4x' - 3y' + 10z' + 19 = 0 \quad -2x' + 3z' + 4 = 0$$

43. Uveďte příklad dvou podprostorů (každý s minimální dimenzí 1) takových, že jejich vzdálenost je 0.

V afinní rovině například dvě různoběžné přímky.

$$A_2: \ p_1 \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad p_2 \equiv X = [0;0] + s(1;0)$$

44. Napište definici kolmosti dvou vektorových podprostorů.

Definice 11.5.
Nechť $W, S$ jsou netriviální podprostory euklidovského vektorového prostoru $V$. Je-li

$$W \subseteq S^{\perp} \text{ nebo } W \supseteq S^{\perp},$$

pak podprostory $W, S$ nazýváme kolmé (ve $V$) a označujeme $W \perp S$.

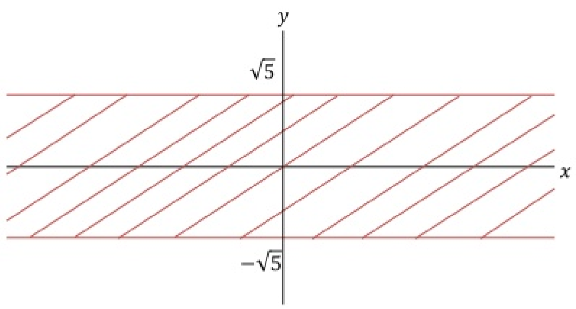
45. Uveďte příklad bodů v obecné poloze takových, že generují $A_4$.

Prostor dimenze 4 $\Rightarrow$ 5 bodů v obecné poloze

$$\begin{aligned} A_0 &= [0;0;0;0] \\ A_1 &= [1;0;0;0] \\ A_2 &= [0;1;0;0] \\ A_3 &= [0;0;1;0] \\ A_4 &= [0;0;0;1] \end{aligned}$$

46. V afinní rovině je dána množina $M$, množinu načrtněte a rozhodněte, zda je konvexní:

$$M = \{[x,y] | y^2 \leq 5\}$$




Ano, je konvexní.

47. Rozhodněte, zda jsou body $A = [3, -2, -3, 1]$, $B = [9, -2, 3, -8]$ oddělovány nadrovinou $\beta \equiv 3x_1 - 7x_2 + 11x_3 + 13x_4 = 17$.

$$\begin{aligned} \beta:\ 3x_1 - 7x_2 + 11x_3 + 13x_4 - 17 &= 0 \\ A:\ 3\cdot(3) - 7\cdot(-2) + 11\cdot(-3) + 13\cdot(1) - 17 &= -14 \\ B:\ 3\cdot(9) - 7\cdot(-2) + 11\cdot(3) + 13\cdot(-8) - 17 &= -47 \end{aligned}$$

Body $A, B$ nejsou oddělovány nadrovinou $\beta$.

48. Napište definici dělícího poměru bodu $C$ vzhledem k bodům $A, B$.

Definice 8.1.
Nechť $A, B, C$ jsou tři navzájem různé body ležící na dané přímce $p$.
Reálné číslo $\lambda$ splňující vztah

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{BC}$$

nazýváme dělicím poměrem bodu $C$ vzhledem k bodům $A, B$ (v tomto pořadí) a označujeme symbolem $(C; A, B)$.

49. Napište definici vzdálenosti afinních podprostorů.

Definice 15.1.
Nechť $B, C$ jsou podprostory euklidovského (bodového) prostoru $E$.
Pak vzdáleností podprostorů $B, C$ nazýváme nezáporné reálné číslo $v(B, C)$, definované

$$v(B, C) = \min\{\overline{XY} | X \in B, Y \in C\}.$$

50. Uveďte příklad dvou totálně kolmých podprostorů v $E_3$.

Pouze přímka a rovina

$$p \equiv X = [0; 0; 0] + t(1; 0; 0) \quad \varrho \equiv X = [0; 0; 0] + s(0; 1; 0) + r(0; 0; 1)$$

51. Uveďte příklad bodů v obecné poloze takových, že generují nadrovinu.

Například dva body v $A_2$.

$$\begin{aligned} A_0 &= [0; 0] \\ A_1 &= [1; 0] \end{aligned}$$

52. Napište definici konvexní množiny.

Definice 10.1.
Podmnožina $K$ afinního prostoru $A$ se nazývá konvexní množina (v $A$), jestliže pro libovolné $A, B \in K$ platí, že $[A, B] \subseteq K$.

53. Napište parametrické vyjádření podprostoru $\beta$ v $A_4$, je-li $\beta \equiv x_2 = 1$.

$$\beta \equiv X = [0; 1; 0; 0] + t(1; 0; 0; 0) + s(0; 0; 1; 0) + r(0; 0; 0; 1)$$

54. V afinní rovině jsou dány body $A[1;p]$ a $B[1;0]$. Určete souřadnice bodu $C$ tak, aby platilo $(B;A,C)=4$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= 4\cdot\overrightarrow{CB} \\ B-A &= 4\cdot(B-C) \\ C &= \frac{1}{4}(3B+A) \\ C &= \left[1;\frac{p}{4}\right] \end{aligned}$$

55. $(\underline{\mathbf{e}}_1,\underline{\mathbf{e}}_2,\underline{\mathbf{e}}_3)$ je kladná báze orientovaného vektorového prostoru $V_3$.
Rozhodněte, zda vektory $(\underline{\mathbf{u}}_1,\underline{\mathbf{u}}_2,\underline{\mathbf{u}}_3)$ tvoří kladnou, resp. zápornou bázi $V_3$,
$\underline{\mathbf{u}}_1=(1;2;3),\underline{\mathbf{u}}_2=(2;3;1),\underline{\mathbf{u}}_3=(3;1;2)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18 < 0 \;\Rightarrow\; \text{záporná báze}$$

56. Napište parametrické vyjádření podprostoru $\beta$ v $A_4$, je-li $\beta\equiv x_2=1$.

$$\beta\equiv X=[0;1;0;0]+t(1;0;0;0)+s(0;0;1;0)+r(0;0;0;1)$$

57. V $A_4$ zadejte neparametricky dvě roviny tak, aby jejich průnikem byl bod.

Rovina v $A_4$ je neparametricky dána dvěma rovnicemi.
Například s průsečíkem v $[0;0;0;0]$:

$$\varrho:\ \begin{matrix} x_1=0 \\ x_2=0 \end{matrix} \qquad \sigma:\ \begin{matrix} x_3=0 \\ x_4=0 \end{matrix}$$

58. Nakreslete přímku a na ní body $A,B,C$ tak aby $(B;C,A)=3$


59. Rozhodněte, zda jsou body $A=[3,-2,-3,1]$, $B=[9,-2,3,-8]$ oddělovány nadrovinou $\beta\equiv 3x_1-7x_2+11x_3+13x_4=17$.

$$\begin{aligned} \beta:\ 3x_1-7x_2+11x_3+13x_4-17 &= 0 \\ A:\ 3\cdot(3)-7\cdot(-2)+11\cdot(-3)+13\cdot(1)-17 &= -14 \\ B:\ 3\cdot(9)-7\cdot(-2)+11\cdot(3)+13\cdot(-8)-17 &= -47 \end{aligned}$$

Body $A,B$ nejsou oddělovány nadrovinou $\beta$.

60. V afinní rovině udejte příklad tří polorovin tak, že jejich průnikem není konvexní mnohostěn.

Například pás, tedy neohraničená množina, není konvexní mnohostěn, neboť jej zřejmě nemůžeme dostat jako konvexní obal konečné množiny bodů.

$$\beta_1 : \ x \leq 1 \quad \beta_2 : \ x \geq 0 \quad \beta_3 : \ x \geq -1$$

61. Určete ortonormální bázi podprostoru generovaného vektory $(1,2,2,-1)$, $(1,1,-5,3)$ a $(3,2,8,-7)$.

Gramm-Schmidtův ortogonalizační proces:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{f}}_1 &= (1,2,2,-1) \\
\underline{\mathbf{f}}_2 &= a \cdot (1,2,2,-1) + (1,1,-5,3) \\
\underline{\mathbf{f}}_2 &= (2,3,-3,2) \\
\underline{\mathbf{f}}_3 &= b \cdot (1,2,2,-1) + c \cdot (2,3,-3,2) + (3,2,8,-7) \\
\underline{\mathbf{f}}_3 &= (2,-1,-1,-2)
\end{aligned}$$

Znormujeme:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\underline{\mathbf{f}}_1}{||\underline{\mathbf{f}}_1||} = \frac{(1,2,2,-1)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{\sqrt{10}}{5}, \frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}\right) \\
\underline{\mathbf{e}}_2 &= \frac{\underline{\mathbf{f}}_2}{||\underline{\mathbf{f}}_2||} = \frac{(2,3,-3,2)}{\sqrt{26}} = \left(-\frac{\sqrt{26}}{13}, \frac{3\sqrt{26}}{26}, -\frac{3\sqrt{26}}{26}, \frac{\sqrt{26}}{13}\right) \\
\underline{\mathbf{e}}_3 &= \frac{\underline{\mathbf{f}}_3}{||\underline{\mathbf{f}}_3||} = \frac{(2,-1,-1,-2)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{\sqrt{10}}{5}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{\sqrt{10}}{5}\right)
\end{aligned}$$

62. V $E_3$ udejte příklad přímky a roviny tak, aby jejich odchylka byla 30°.

V $E_3$ je rovina nadrovinou, tedy $\measuredangle(p, \varrho) = 30^\circ \ \Leftrightarrow \ \measuredangle(p, \underline{\mathbf{n}}) = 60^\circ$

$$p \equiv X = [0;0;0] + t(1;0;0) \quad \varrho : x + \sqrt{3}y = 0$$

63. Napište definici kolmosti dvou vektorových podprostorů.

Definice 11.5.
Nechť $W, S$ jsou netriviální podprostory euklidovského vektorového prostoru $V$. Je-li

$$W \subseteq S^\perp \text{ nebo } W \supseteq S^\perp,$$

pak podprostory $W, S$ nazýváme kolmé (ve $V$) a označujeme $W \perp S$.

64. Udejte příklad dvou totálně kolmých nadrovin.

Může jít pouze o kolmé přímky v názorné rovině.

$$A_2 : \ p_1 \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad p_2 \equiv X = [0;0] + s(0;1)$$

65. $(\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_2, \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4)$ je kladná báze orientovaného vektorového prostoru $V_4$.
Rozhodněte, zda následující vektory tvoří kladnou, resp. zápornou bázi $V_4$.
a) $(\underline{\mathbf{u}}_2, -\underline{\mathbf{u}}_1, \underline{\mathbf{u}}_4, -\underline{\mathbf{u}}_3)$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & -1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & -1 \\ \mathbf{0} & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0 \Rightarrow \text{ kladná báze}$$

b) $(-7\underline{\mathbf{u}}_1, 9\underline{\mathbf{u}}_2, -\underline{\mathbf{u}}_4, 2\underline{\mathbf{u}}_3)$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-7} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 9 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 2 \\ \mathbf{0} & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-7) \cdot \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -126 < 0 \Rightarrow \text{ záporná báze}$$

c) $(\underline{\mathbf{u}}_3, -2\underline{\mathbf{u}}_1 + \underline{\mathbf{u}}_4, -\underline{\mathbf{u}}_4 - \underline{\mathbf{u}}_3, \underline{\mathbf{u}}_4)$

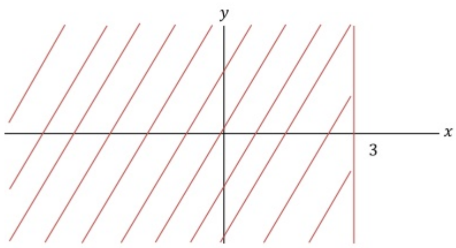
$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{ není báze}$$

d) $(\underline{\mathbf{u}}_4, \underline{\mathbf{u}}_2, 3\underline{\mathbf{u}}_3 - 2\underline{\mathbf{u}}_1, -\underline{\mathbf{u}}_1)$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & 0 & -2 & -1 \\ \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 3 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 > 0 \Rightarrow \text{ kladná báze}$$

66. V afinní rovině je dána množina $M$, rozhodněte, zda je konvexní:
a)

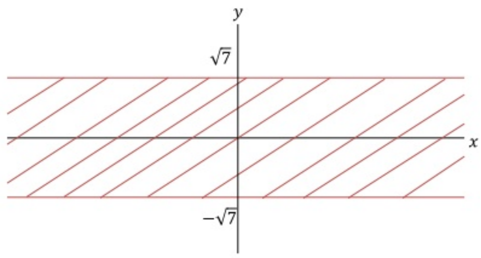
$$M = \{[x, y] | 2x - 2 \leq 4\}$$




Ano, je konvexní.

b)

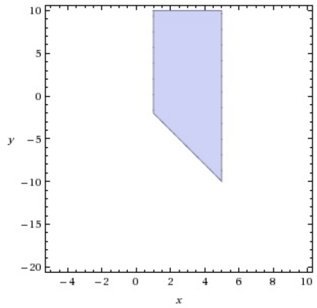
$$M = \{[x, y] | y^2 \leq 7\}$$




Ano, je konvexní.

c)

$$M = \{[x,y] | y + 2x \geq 0, x \in (1;5)\}$$




Ano, je konvexní.

67. V kanonickém afinním prostoru $A_4$ udejte příklad netriviálního afinního podprostoru $\beta$ a nenulového vektoru $\underline{\mathbf{w}}$ tak, aby ortogonální projekce vektoru $\underline{\mathbf{w}}$ vzhledem k $\beta$ byla nulový vektor.

Ortogonální projekce nulový vektor $\Rightarrow \underline{\mathbf{w}} \in Z(\beta)^{\perp}$

$$\beta : \; x_1 = 0$$

$$\underline{\mathbf{w}} = (1,0,0,0)$$

68. V kanonickém afinním prostoru $A_4$ udejte příklad:

a) Rovnoběžnostěnu, jehož objem má velikost 3.

Například 1-rozměrný rovnoběžnostěn, tedy úsečka délky 3.

$$R_1 \equiv X = [0;0;0;0] + t(1;0;0;0), \quad t \in \langle 0;3 \rangle$$

b) Dvou podprostorů takových, že ortog. doplněk jejich průniku je nulový vektor.

Ortogonální doplněk je množina, nikoliv vektor, tedy takovéto podprostory neexistují.
Při korektním zadání, tedy, že má jít o množinu obsahující pouze nulový vektor, musí být oba uvažované podprostory rovny celému prostoru $A_4$.

c) Bodů $A, B, C$ v obec. poloze, aby odchylka $\measuredangle(AB, AC) = \measuredangle(BA, BC) = \measuredangle(AC, BC)$.

Například vrcholy rovnostranného trojúhelníhu strany délky 2, umístěného do prvních dvou rozměrů.

$$\begin{aligned} A &= [0;0;0;0] \\ B &= [2;0;0;0] \\ C &= [1;\sqrt{3};0;0] \end{aligned}$$

69. V afinní rovině jsou dány body $A[0,k]$ a $B[4,0]$, určete souřad. bodu $C$ tak aby platilo:

a) $(B;A,C) = -3$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= -3 \cdot \overrightarrow{CB} \\
B - A &= -3 \cdot (B - C) \\
C &= \frac{1}{3}(4B - A) \\
C &= \left[\frac{16}{3}; -\frac{k}{3}\right]
\end{aligned}$$

b) $(A;C,B) = 2$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CA} &= 2 \cdot \overrightarrow{BA} \\
A - C &= 2 \cdot (A - B) \\
C &= -A + 2B \\
C &= [8; -k]
\end{aligned}$$

c) $(C;A,B) = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{4} \cdot \overrightarrow{BC} \\
C - A &= \frac{1}{4} \cdot (C - B) \\
C &= \frac{1}{3}(4A - B) \\
C &= \left[-\frac{4}{3}; \frac{4k}{3}\right]
\end{aligned}$$

d) $(C;A,B) = -\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= -\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BC} \\
C - A &= -\frac{2}{3} \cdot (C - B) \\
C &= \frac{1}{5}(3A + 2B) \\
C &= \left[\frac{8}{5}; \frac{3k}{5}\right]
\end{aligned}$$

70. Uveďte příklad:

a) Dvou kolmých nadrovin.

Například dvě kolmé přímky v rovině.

$$A_2: \; p_1 \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad p_2 \equiv X = [0;0] + s(0;1)$$

b) Dvou rovnoběžných podprostorů, jejichž součtem je celý afinní prostor.
Například dvě rovnoběžné různé přímky v rovině.

$$A_2: \; p \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad q \equiv X = [0;1] + s(1;0)$$

c) Nadroviny a přímky tak, aby jejich odchylka byla $60°$.

V afinní rovině jde o dvě přímky, představující strany rovnostranného trojúhelníku.

$$A_2: \; p \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad q \equiv X = [0;0] + s(1;\sqrt{3})$$

71. V afinní rovině udejte příklad dvou poloprostorů tak, aby jejich průnikem byla prázdná množina.

$$\beta_1: \; x \geq 1 \quad \beta_2: \; x \leq 0$$

72. Napište definici ortogonálního doplňku vektorového podprostoru.

Definice 11.3.
Nechť $W$ je podprostor euklidovského vektorového prostoru $V$.
Množinu

$$W^{\perp} = \{\underline{\mathbf{x}} \in V | \underline{\mathbf{x}} \perp \underline{\mathbf{w}}, \text{pro každý vektor } \underline{\mathbf{w}} \in W\}$$

nazýváme ortogonálním doplňkem podprostoru $W$ ve $V$.

73. Uveďte příklad tří nadrovin patřících do jednoho svazku prvního druhu.

V afinní rovině jde o tři přímky procházející jedním bodem.

$$A_2: \; p_1 \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad p_2 \equiv X = [0;0] + s(0;1) \quad p_3 \equiv X = [0;0] + r(1;1)$$

74. V $A_4$ uveďte příklad dvojice mimoběžných přímek.

$$p_1 \equiv X = [1;0;0;0] + t(0;1;0;0) \quad p_2 \equiv X = [0;0;1;0] + s(0;0;0;1)$$

75. Uveďte příklad bodů v obecné poloze, tak aby generovaly podprostor dimenze 3.

Podprostor dimenze 3 $\Rightarrow$ 4 body v obecné poloze, alespoň v $A_3$

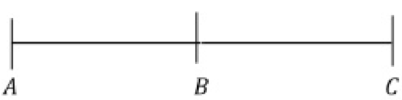
$$\begin{aligned} A_0 &= [0;0;0] \\ A_1 &= [1;0;0] \\ A_2 &= [0;1;0] \\ A_3 &= [0;0;1] \end{aligned}$$

76. Uveďte příklad dvou kolmých nadrovin.

Například dvě kolmé přímky v rovině.

$$A_2: \; p_1 \equiv X = [0;0] + t(1;0) \quad p_2 \equiv X = [0;0] + s(0;1)$$

77. Je-li $(C; A, B) = 2$, čemu se rovná $(B; A, C)$?




$(B; A, C) = -1$